

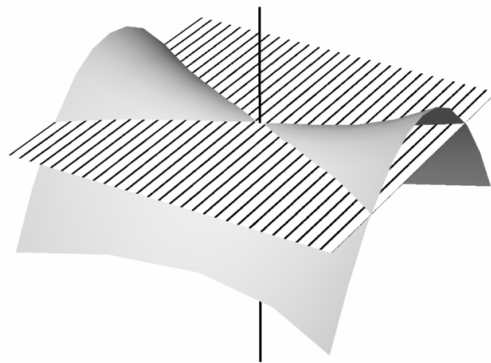
2 תכונות טופולוגיות של היריעות החלקות המחלקות את המרחב לשני תת מרחבים זהים.

2.1 יריעות דו-ממדיות מושגים ותכונות

היריעות הנדונות משתייכות למשפחת היריעות הדו-ממדיות והחלקות. יריעות דו-ממדיות חלקות מאופיינות בכך שכל נקודותיהן הינן נקודות רגולריות (regular points). נקודה רגולרית על פני היריעה היא נקודה אשר כל המשיקים לעקומות אשר ניתן להעביר על פני היריעה ועוברות דרך אותה נקודה נמצאים במישור אחד. המישור הזה נקרא המישור המשיק ליריעה בנקודה (tangent plane). האנך למישור המשיק ליריעה באותה הנקודה נקרא הנורמל ליריעה. העקומות העוברות דרך נקודה רגולרית ונמצאות במישור המכיל את הנורמל למשטח באותה נקודה נקראות החתכים הנורמליים.

המישור המשיק ליריעה מאפיין שני סוגי יריעות:

- יריעה אשר המישור המשיק לה חותך אותה - יריעה אוכפית (ציור 2).
- יריעה אשר נמצאת כולה בצידו האחד של המישור המשיק לה - יריעה קמורה.



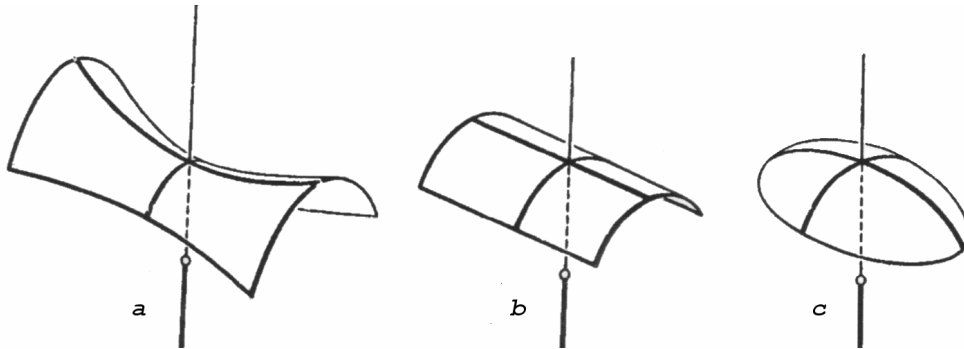
ציור 2 - מישור משיק ליריעה אוכפית

Tangent plane to a saddle surface

בין כל החתכים הנורמליים העוברים דרך נקודה רגולרית על פני יריעה חלקה, קיימים שני חתכים נורמליים ייחודיים. חתך אחד המתאר עקומה בעלת עיקום מרבי (Maximum curvature). וחתך שני המתאר עקומה בעלת עיקום מזערי (Minimum curvature). שני העיקומים הנ"ל נקראים העיקומים הראשיים (principal curvatures) ליריעה והם מאונכים זה לזה. הממוצע של העיקומים הראשיים נקרא "העיקום הממוצע" ואילו מכפלת העיקומים הראשיים נקראת "העיקום הגאומטרי של היריעה בנקודה".

העיקום הגאומטרי בנקודה הוא מספר, המאפיין את צורת היריעה בסביבת אותה נקודה. (ציור 3), כמפורט להלן:

- א. יריעות דו ממדיות אשר כל נקודותיהן הן בעלות עיקום גאומטרי שלילי (שני העיקומים הראשיים שונים סימן) - הן אוקפיות (בצורת אוכף).
- ב. יריעות דו ממדיות אשר כל נקודותיהן הן בעלות עיקום גאומטרי השווה לאפס (אחד מן העיקומים הראשיים שווה לאפס) - הן יריעות פרבוליות (גליליות).
- ג. יריעות דו ממדיות אשר כל נקודותיהן הן בעלות עיקום גאומטרי חיובי (שני העיקומים הראשיים שווים סימן) - הן יריעות אליפטיות (קמורות).



ציור 3 - יריעות בעלות עיקום גאומטרי שונה

Hyperbolic surface with negative Gaussian curvature.

Elliptic surface with positive Gaussian curvature.

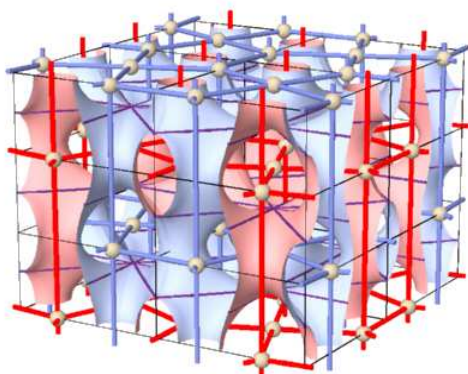
Parabolic surface with zero Gaussian curvature.

- א. יריעה אוקפית בעלת עיקום גאומטרי שלילי.
- ב. יריעה אליפטית (קמורה) בעלת עיקום גאומטרי חיובי.
- ג. יריעה פרבולית (גלילית) בעלת עיקום גאומטרי השווה לאפס.

2.2 יריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

מחקירת התופעה של חלוקת המרחב לשני תת מרחבים זהים על ידי היריעות הנדונות, אנו למדים על התכונות הטופולוגיות האופייניות שלהן אותן נמייך ונמנה:

- א. היריעות הן דו-ממדיות (2-manifold surface), חלקות, אוקפיות וממומשות במרחב האאוקלידי התלת-ממדי.

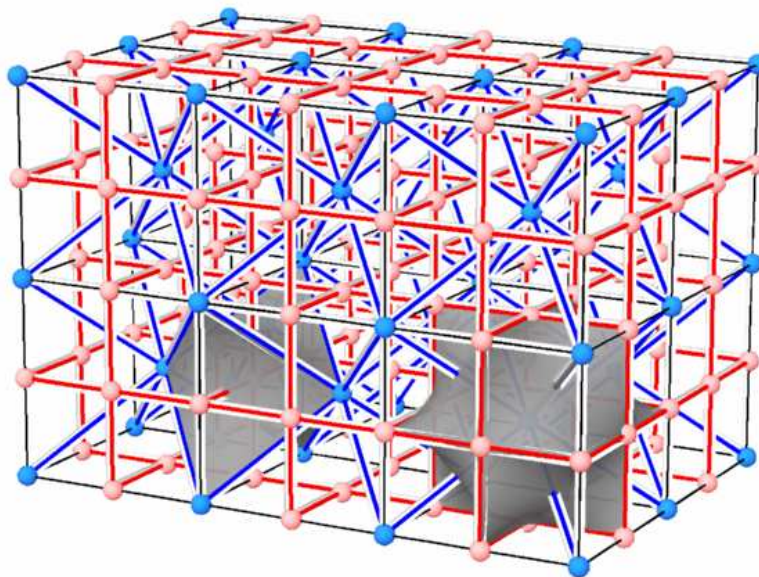


ציור 4 - שתי רשתות "מנהרות" והיריעה המפרידה ביניהן

Two dual tunneled networks and the 2-manifold buffer between them

ב. היריעות מחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. שני תת-המרחבים מכונים לעיתים מרחבים דואליים (dual spaces) ומרחבים משלימים (complimentary spaces) או מרחבים חופפים (Congruent spaces). שני תת-המרחבים האלה הינם דמויי שתי מנהרות המשתלבות האחת בשניה ואינן חותכות זו את זו. שתי המנהרות זהות בנפחן ובצורתן וציריהן יוצרים שתי רשתות תלת-ממדיות דואליות זהות (ציור 4).

ג. דואליות של רשתות מתבטאת בכך שקודקוד של האחת מתחלף בנפח של "יחידה אורזת" של הרשת הדואלית לה. כל רשת תלת-ממדית, מחזורית במרחב, ניתן לייצגה על ידי אריזה צפופה (ללא השארת חללים) של גוף או מספר גופים מרחביים. הגופים עשויים להיות בעלי פאות מישוריות, בעלי פאות חלקות בצורת אוקף או שילוב של שתייהן. הגופים הללו מכונים "הגופים האורזים של הרשת". קדקודי הרשת האחת ממוקמים במרכז הגופים האורזים של הרשת הדואלית לה. צלעות הרשתות המחברות בין קדקודי הרשת דוקרות את הפאות המשותפות לשני גופים אורזים סמוכים. לכל רשת מחזורית במרחב יש רשת דואלית אחת ויחידה. שתי הרשתות דואליות זו לזו (ציור 5).



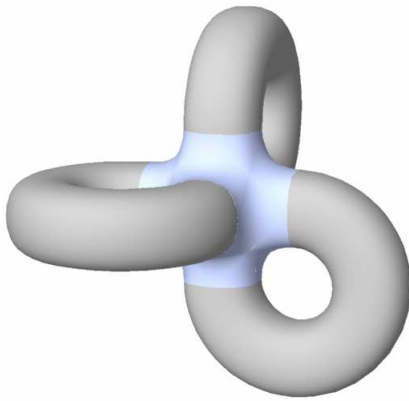
ציור 5 - שתי רשתות דואליות זו לזו והגופים האורזים שלהן בהתאמה.

Two dual networks and their packing units

ד. צירי סיבוב של 180° מהווים טרנספורמציה המעבירה תת-מרחב אחד לתת-המרחב המשלים הזהה לו. צירי הסיבוב האלה מוכלים כולם ביריעה ויוצרים רשת אותה נכנה "רשת צירי 2-fold". כל צלעות הרשת הנפגשות בקודקוד (נקודות החיתוך של צירי ה- 2-fold) נמצאות במישור אחד. ה. מחזוריות היריעה מצביעה על כך שהיריעה מורכבת מיחידות מחזוריות בסיסיות, וכן על הקשר בין היריעה לחבורות הסימטרייה במרחב.

היריעות הנדונות הינן בעלות תא הזזה סגור וכוללות הזזות טיפוסיות. תא הזזה של חבורת הסימטרייה הפועלת על מרחב היריעה, מכיל קטע מן היריעה אשר מחלקת את נפחו לשני נפחים זהים בגודלם ובצורתם. קטע היריעה הכלוא בתוך תא ההזזה של חבורת הסימטרייה מהווה יחידה בסיסית להזזה. היחידה הבסיסית להזזה של היריעה היא בצורת גוף סגור בעל "שרוולים" פתוחים.

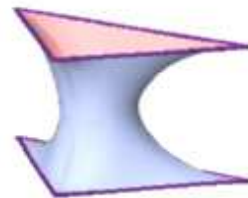
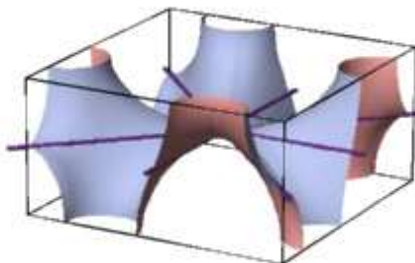
1. מספר ה"יחידות" הדרושות לשם סגירת היריעה נקרא "הגנוס של היריעה" ומסומן ב- g . ערכו של הגנוס הינו מספר חיובי שלם, דהיינו: מספר הפתחים של יחידה בסיסית להזזה של היריעה הוא מספר זוגי. הגנוס של המשטח הוא ערך הנובע בין היתר מן העיקום הגאומטרי האינטגרלי של היריעה (ציור 6).



ציור 6 - תא הזזה (סגור) טיפוסי של יריעה מחזורית בעלת גנוס 3 והיחידות הדרושות לסגירתו.

Typical translation (closed) cell of a periodic 2-manifold with genus 3 and the handles, which are required to close it.

אנו מבחינים בשתי צורות של יחידות מחזוריות בסיסיות של יריעה המחלקת את המרחב לשני תת מרחבים זהים: האחת - יחידה מחזורית הכלואה בתוך מצולע מרחבי סגור המורכב מצירי 2-fold הנגזרים מרשת צירי ה-2-fold, והשנייה - פיסת יריעה בסיסית הנגזרת מן היריעה על ידי אלמנטי הסימטרייה הפועלים על היריעה (ציור 7).

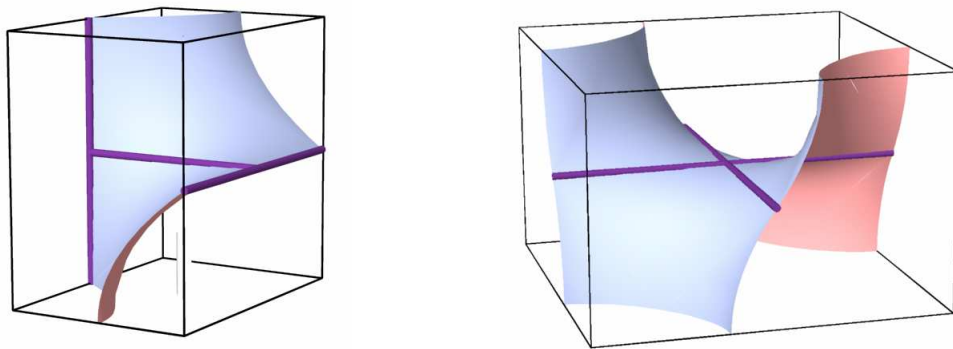


ציור 7 - יחידות מחזוריות בסיסיות
Elementary periodic units

ז. בפיסת היריעה הבסיסית מיוצגות כל תכונות היריעה, לרבות ייצוג לצירי ה-2-fold המסובבים אותה לתוך עצמה. פיסת היריעה הבסיסית הנגזרת על ידי אלמנטי הסימטרייה הפועלים עליה מיוצגת בתוך מרחב בסיסי (E.P.R.) עליו נרחיב את הדיון בפרק הבא.

המרחב הבסיסי (E.P.R.) מייצג בתוכו ועל פניו כל אלמנט מחזורי השייך למרחב אותו הוא מייצג. במקרה של היריעות הנדונות, מיוצגת היריעה ע"י פיסת יריעה בסיסית הנגזרת על ידי אלמנטי הסימטרייה הפועלים על מרחב היריעה. פיסת יריעה זו מחלקת את נפחו של המרחב הבסיסי לשני נפחים זהים.

רשת צירי ה-2-fold מיוצגת על ידי ציר או מספר צירים העוברים דרך המרחב הבסיסי ומסובבים אותו לתוך עצמו, וכן בנוסף קיימים מקרים בהן רשת צירי ה-2-fold מיוצגת על ידי ציר או צירים המסובבים את המרחב הבסיסי לתוך מרחב בסיסי שכן לו (ציור 8).



ציור 8 - צירי 2-fold המיוצגים ב"מרחב הבסיסי"
2-fold axes represented in the E.P.R